Hoofdstuk 14: Krommen

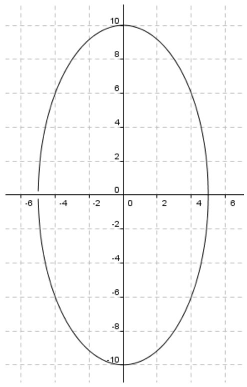
14.1 Symmetrie

Opgave 1:

a. $4x^2 + y^2 = 100$

$y^2 = 100 - 4x^2$

$y = \sqrt{100 - 4x^2} \quad \vee \quad y = -\sqrt{100 - 4x^2}$

b. 

c. $y = \sqrt{100 - 4 \cdot 3^2} = 8 \quad \vee \quad y = -\sqrt{100 - 4 \cdot 3^2} = -8$

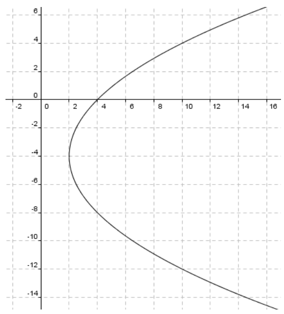
d. $4x^2 + 36 = 100$

$4x^2 = 64$

$x^2 = 16$

$x = 4 \quad \vee \quad x = -4$

Opgave 2:



a. $y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$

$(y+4)^2 - 16 - 8x + 32 = 0$

$(y+4)^2 = 8x - 16$

$y + 4 = \pm\sqrt{8x - 16}$

$y = -4 \pm \sqrt{8x - 16}$

b. $(y+4)^2 = 8x - 16$

$(y+4)^2 = 8(x-2)$

dus K is een parabool met top $(2,-4)$, brandpunt $F(4,-4)$ en richtlijn $x = 0$

Opgave 3:

a. $4x^2 + 6y^2 + 16x - 36y + 46 = 0$

$4(x^2 + 4x) + 6(y^2 - 6y) + 46 = 0$

$4((x+2)^2 - 4) + 6((y-3)^2 - 9) + 46 = 0$

$4(x+2)^2 - 16 + 6(y-3)^2 - 54 + 46 = 0$

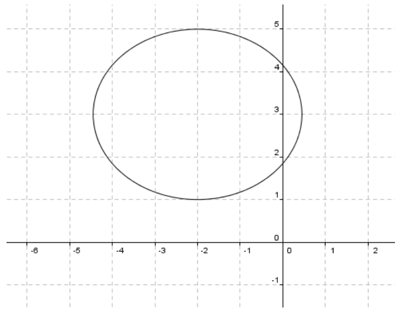
$4(x+2)^2 + 6(y-3)^2 = 24$

$6(y-3)^2 = 24 - 4(x+2)^2$

$(y-3)^2 = 4 - \frac{2}{3}(x+2)^2$

$y-3=\pm\sqrt{4-\frac{2}{3}(x+2)^2}$

$y=3\pm\sqrt{4-\frac{2}{3}(x+2)^2}$



b. $4(x+2)^2+6(y-3)^2=24$

$\dfrac{(x+2)^2}{6}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

dus K is een ellips met middelpunt $(-2,3)$

de toppen zijn $(-2-\sqrt{6},3)$, $(-2+\sqrt{6},3)$, $(-2,1)$ en $(-2,5)$

$c^2=a^2-b^2=6-4=2$ dus de brandpunten zijn $F_1(-2-\sqrt{2},3)$ en $F_2(-2+\sqrt{2},3)$

Opgave 4:

a. $9x^2-16y^2+54x+64y-127=0$

$9(x^2+6x)-16(y^2-4y)-127=0$

$9((x+3)^2-9)-16((y-2)^2-4)-127=0$

$9(x+3)^2-81-16(y-2)^2+64-127=0$

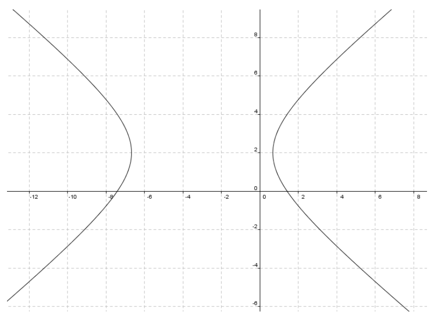
$9(x+3)^2-16(y-2)^2=144$

$-16(y-2)^2=144-9(x+3)^2$

$(y-2)^2=-9+\frac{9}{16}(x+3)^2$

$y-2=\pm\sqrt{-9+\frac{9}{16}(x+3)^2}$

$y=2\pm\sqrt{-9+\frac{9}{16}(x+3)^2}$



b. $9(x+3)^2-16(y-2)^2=144$

$\dfrac{(x+3)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

dus K is een hyperbool met middelpunt $(-3,2)$

de toppen zijn $(-7,2)$ en $(1,2)$

$c^2=a^2+b^2=16+9=25$

dus de brandpunten zijn $F_1(-8,2)$ en $F_2(2,2)$

de asymptoten zijn $y-2=\frac{3}{4}(x+3)$ en $y-2=-\frac{3}{4}(x+3)$

ofwel $y=\frac{3}{4}x+4\frac{1}{4}$ en $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

c. $324-16(y-2)^2=144$

$-16(y-2)^2=-180$

$(y-2)^2=11{,}25$

$y-2=\sqrt{11{,}25} \quad \vee \quad y-2=-\sqrt{11{,}25}$

$y=2+\sqrt{11{,}25}=5{,}354 \quad \vee \quad y=2-\sqrt{11{,}25}=-1{,}354$

$AB=5{,}354--1{,}354=6{,}708$

d. $9(x+3)^2-144=144$

$9(x+3)^2=288$

$(x+3)^2=32$

$x+3=\sqrt{32} \quad \vee \quad x+3=-\sqrt{32}$

$x = -3 + \sqrt{32} = 2{,}657 \quad \vee \quad x = -3 - \sqrt{32} = -8{,}657$

$CD = 2{,}657 - -8{,}657 = 11{,}314$

e. $x - 2y + 10 = 0$

$-2y = -x - 10$

$y = \frac{1}{2}x + 5$

neem $y_1 = 2 + \sqrt{-9 + \frac{9}{16}(x+3)^2}$ en $y_2 = 2 - \sqrt{-9 + \frac{9}{16}(x+3)^2}$ en $y_3 = \frac{1}{2}x + 5$

intersect van y_1 en y_3 geeft $(5{,}682;7{,}931)$

intersect van y_2 en y_3 geeft $(-7{,}062;1{,}469)$

$EF = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 14{,}289$

Opgave 5:

a. (a,b) op de ellips, dus $4a^2 + b^2 = 100$

$(a,-b)$ invullen geeft $4a^2 + (-b)^2 = 100$ ofwel $4a^2 + b^2 = 100$

dus dan ligt $(a,-b)$ op de ellips

b. $(-a,b)$ invullen geeft: $4(-a)^2 + b^2 = 100$ ofwel $4a^2 + b^2 = 100$

dus $(-a,b)$ ligt op de ellips

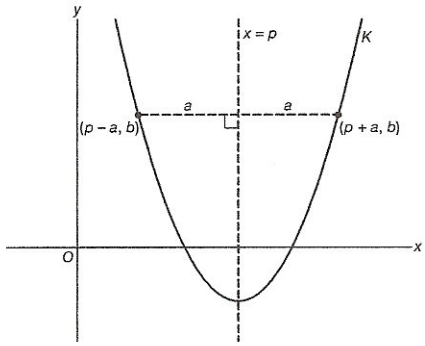
$(-a,-b)$ invullen geeft: $4(-a)^2 + (-b)^2 = 100$ ofwel $4a^2 + b^2 = 100$

dus $(-a,-b)$ ligt op de ellips

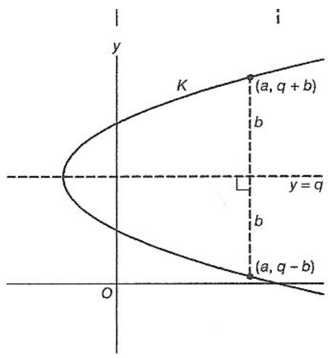
c. (b,a) invullen geeft: $4b^2 + a^2 = 100$ dus het punt (b,a) ligt niet op de ellpis

Opgave 6:

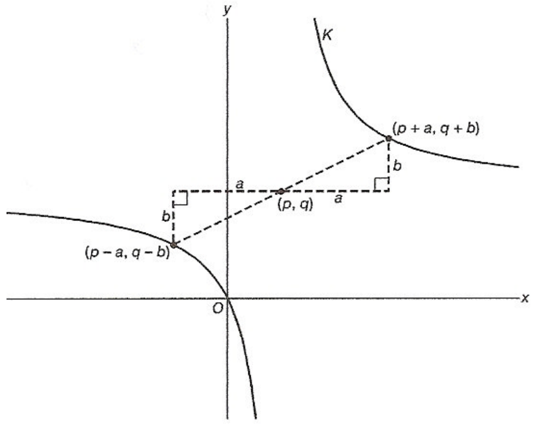
a.



b.



c.



Opgave 7:

$(a,-1+b)$ ligt op K dus: $9a^2-4(-1+b)^2-36a-8(-1+b)-4=0$

$9a^2-4+8b-4b^2-36a+8-8b-4=0$

$9a^2-36a-4b^2=0$

$(a,-1-b)$ invullen geeft: $9a^2-4(-1-b)^2-36a-8(-1-b)-4=0$

$9a^2-4-8b-4b^2-36a+8+8b-4=0$

$9a^2-36a-4b^2=0$

dus $(a,-1-b)$ ligt op K, dus K is symmetrisch t.o.v. $y=-1$

Opgave 8:

a. $(a,-4+b)$ ligt op K dus: $(-4+b)^2-8a+8(-4+b)+32=0$

$16-8b+b^2-8a-32+8b+32=0$

$b^2-8a+16=0$

$(a,-4-b)$ invullen geeft: $(-4-b)^2-8a+8(-4-b)+32=0$

$16+8b+b^2-8a-32-8b+32=0$

$b^2-8a+16=0$

dus $(a,-4-b)$ ligt op K, dus K is symmetrisch t.o.v. $y=-4$

b. $(-2+a,3+b)$ ligt op K dus:

$4(-2+a)^2+6(3+b)^2+16(-2+a)-36(3+b)+46=0$

$16-16a+4a^2+54+36b+6b^2-32+16a-108-36b+46=0$

$4a^2+6b^2-24=0$

$(-2-a,3-b)$ invullen geeft:

$4(-2-a)^2+6(3-b)^2+16(-2-a)-36(3-b)+46=0$

$16+16a+4a^2+54-36b+6b^2-32-16a-108+36b+46=0$

$4a^2+6b^2-24=0$

dus $(-2-a,3-b)$ ligt op K, dus K is symmetrisch t.o.v. $(-2,3)$

c. (a,b) ligt op K dus: $a^2+b^2-2ab-2a-2b-3=0$

(b,a) invullen geeft: $b^2+a^2-2ba-2b-2a-3=0$

$a^2+b^2-2ab-2a-2b-3=0$

dus (b,a) ligt op K, dus K is symmetrisch t.o.v. $y=x$

Opgave 9:
De kromme van opgave 2 is symmetrisch t.o.v. $y = -4$.
De kromme van opgave 3 is symmetrisch t.o.v. $y = 3$.
De kromme van opgave 4 is symmetrisch t.o.v. $y = 2$.

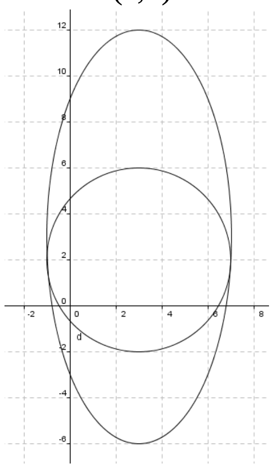
Opgave 10:
a. $(-3+a, 2+b)$ ligt op K dus:
$$9(-3+a)^2 - 16(2+b)^2 + 54(-3+a) + 64(2+b) - 127 = 0$$
$$81 - 54a + 9a^2 - 64 - 64b - 16b^2 - 162 + 54a + 128 + 64b - 127 = 0$$
$$9a^2 - 16b^2 - 144 = 0$$
$(-3-a, 2-b)$ invullen geeft:
$$9(-3-a)^2 - 16(2-b)^2 + 54(-3-a) + 64(2-b) - 127 = 0$$
$$81 + 54a + 9a^2 - 64 + 64b - 16b^2 - 162 - 54a + 128 - 64b - 127 = 0$$
$$9a^2 - 16b^2 - 144 = 0$$
dus $(-3-a, 2-b)$ ligt op K, dus K is symmetrisch t.o.v. $(-3,2)$

b. voor L geldt:
$$9(x-3)^2 - 16(y+2)^2 + 54(x-3) + 64(y+2) - 127 = 0$$
$$9x^2 - 54x + 81 - 16y^2 - 64y - 64 + 54x - 162 + 64y + 128 - 127 = 0$$
$$9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$$

Opgave 11:
$$(\tfrac{1}{k}x)^2 + 4y^2 = 100$$
$$\tfrac{1}{k^2}x^2 + 4y^2 = 100$$
$$\tfrac{1}{4k^2}x^2 + y^2 = 25$$
dus $\tfrac{1}{4k^2} = 1$
$$k^2 = \tfrac{1}{4}$$
$$k = \tfrac{1}{2} \quad \vee \quad k = -\tfrac{1}{2}$$

Opgave 12:
a. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$
$$(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 - 3 = 0$$
$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ dit is een cirkel met $M(3,2)$ en $r = 4$

b. ja



Opgave 13:

$V_{y-as}, -\frac{1}{2}$ dus vervang x door $-2x$

$(-2x)^2 + y^2 - 6(-2x) - 4y - 3 = 0$

$4x^2 + y^2 + 12x - 4y - 3 = 0$

$4(x^2 + 3x) + (y-2)^2 - 4 - 3 = 0$

$4((x + 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4}) + (y-2)^2 - 7 = 0$

$4(x + 1\frac{1}{2})^2 - 9 + (y-2)^2 - 7 = 0$

$4(x + 1\frac{1}{2})^2 + (y-2)^2 = 16$

$$\frac{(x+1\frac{1}{2})^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

L is een ellips met middelpunt $(-1\frac{1}{2}, 2)$ en toppen: $(-3\frac{1}{2}, 2), (\frac{1}{2}, 2), (-1\frac{1}{2}, 6)$ en $(-1\frac{1}{2}, -2)$

$c^2 = b^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$ dus de brandpunten zijn $F_1(-1\frac{1}{2}, 2 - \sqrt{12})$ en $F_2(-1\frac{1}{2}, 2 + \sqrt{12})$

Opgave 14:

a. $M(2,4)$, $a = 2$ en $b = 3$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1 \text{ ofwel } 9(x-2)^2 + 4(y-4)^2 = 36$$

b. de korte as heeft lengte 4 en de lange as heeft lengte 6, dus als je een cirkel nodig hebt moet je t.o.v. de y-as vermenigvuldigen met $1\frac{1}{2}$

vervang x door $\frac{2}{3}x$

$9(\frac{2}{3}x - 2)^2 + 4(y-4)^2 = 36$

$9(\frac{2}{3}(x-3))^2 + 4(y-4)^2 = 36$

$9 \cdot \frac{4}{9}(x-3)^2 + 4(y-4)^2 = 36$

$4(x-3)^2 + 4(y-4)^2 = 36$

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$ dit is een cirkel met $M(3,4)$ en $r = 3$

c. t.o.v. de x-as moet je vermenigvuldigen met $\frac{2}{3}$, dus vervang y door $\frac{3}{2}y$

$9(x-2)^2 + 4(\frac{3}{2}y - 4)^2 = 36$

$9(x-2)^2 + 4(\frac{3}{2}(y - 2\frac{2}{3}))^2 = 36$

$9(x-2)^2 + 4 \cdot \frac{9}{4}(y - 2\frac{2}{3})^2 = 36$

$9(x-2)^2 + 9(y - 2\frac{2}{3})^2 = 36$

$(x-2)^2 + (y - 2\frac{2}{3})^2 = 4$ dit is een cirkel met $M(2, 2\frac{2}{3})$ en $r = 2$

Opgave 15:

a. top is $(3,1)$ dus $(y-1)^2 = 2p(x-3)$ door $(4,3)$

$4 = 2p$

$(y-1)^2 = 4(x-3)$

b. $(a,7)$ ligt op de parabool, dus $36 = 4(a-3)$

$a - 3 = 9$

$a = 12$

$(12,7)$ moet het punt $(6,7)$ worden, dus je moet met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen dus vervang x door $2x$

$(y-1)^2 = 4(2x-3)$

$(y-1)^2 = 8(x-1\frac{1}{2})$ dus de beeldgrafiek is een parabool

c. $(19,b)$ ligt op de parabool

$(b-1)^2 = 64$

$b-1=8 \quad \vee \quad b-1=-8$

$b=9 \quad \vee \quad b=-7$ (vervalt hier)

$(19,9)$ moet het punt $(19,3)$ worden, dus je moet met $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigen

dus vervang y door $3y$

$(3y-1)^2 = 4(x-3)$

$(3(y-\frac{1}{3}))^2 = 4(x-3)$

$9(y-\frac{1}{3})^2 = 4(x-3)$

$(y-\frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9}(x-3)$ dus de beeldgrafiek is een parabool

d. $(3,1)$ moet het punt $(6,2)$ worden, dus je moet met 2 vermenigvuldigen

dus vervang x door $\frac{1}{2}x$ en y door $\frac{1}{2}y$

$(\frac{1}{2}y-1)^2 = 4(\frac{1}{2}x-3)$

$(\frac{1}{2}(y-2))^2 = 4(\frac{1}{2}(x-6))$

$\frac{1}{4}(y-2)^2 = 2(x-6)$

$(y-2)^2 = 8(x-6)$ dus de beeldgrafiek is een parabool

Opgave 16:

a. vervang x door $\frac{1}{k}x$

$(y-y_T)^2 = 2p(\frac{1}{k}x-x_T)$

$(y-y_T)^2 = 2p(\frac{1}{k}(x-kx_T)$

$(y-y_T)^2 = \frac{2}{k}p(x-kx_T)$ dus de beeldgrafiek is een parabool

b. vervang x door $\frac{1}{k}x$

$$\frac{(\frac{1}{k}x-x_M)^2}{a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(\frac{1}{k}(x-kx_M))^2}{a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\frac{1}{k^2}(x-kx_M)^2}{a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-kx_M)^2}{k^2a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$\dfrac{(x-kx_M)^2}{(ka)^2}+\dfrac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$ dus de beeldgrafiek is een ellips

c. vervang x door $\frac{1}{k}x$

$$\frac{(\frac{1}{k}x-x_M)^2}{a^2}-\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(\frac{1}{k}(x-kx_M))^2}{a^2}-\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\frac{1}{k^2}(x-kx_M)^2}{a^2}-\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-kx_M)^2}{k^2a^2}-\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

$\dfrac{(x-kx_M)^2}{(ka)^2}-\dfrac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$ dus de beeldgrafiek is een hyperbool

14.2 Parameterstellingen

Opgave 17:

a. $y = 2 - \lambda$

$\lambda = 2 - y$

$x = 3 + 4(2 - y)$

$x = 3 + 8 - 4y$

$x + 4y = 11$

b. $(15,-1)$

c. $x = 3 + 4\lambda = 0$

$4\lambda = -3$

$\lambda = -\frac{3}{4}$

Opgave 18:

a. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$

$(x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 8 = 0$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$ dus $M(2,1)$ en $r = \sqrt{13}$

$l: \quad y = a(x+6)$

$y = ax + 6a$

$ax - y + 6a = 0$

$d(M,l) = r$ dus $\dfrac{|2a - 1 + 6a|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{13}$

$\dfrac{|8a-1|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{13}$

$|8a - 1| = \sqrt{13a^2 + 13}$

$(8a-1)^2 = 13a^2 + 13$

$64a^2 - 16a + 1 = 13a^2 + 13$

$51a^2 - 16a - 12 = 0$

$a = \dfrac{16 \pm \sqrt{2704}}{102} = \dfrac{16 \pm 52}{102}$

$a = -\frac{6}{17} \quad \vee \quad a = \frac{2}{3}$

$l_1: \quad y = -\frac{6}{17}(x+6)$ en $l_2: \quad y = \frac{2}{3}(x+6)$

b. de poollijn van $(-6,0)$ ten opzichte van de cirkel is:

$(-6-2)(x-2) + (0-1)(y-1) = 13$

$-8(x-2) - (y-1) = 13$

$-8x + 16 - y + 1 = 13$

$-y = 8x - 4$

$y = -8x + 4$

de poollijn snijden met de cirkel geeft:

$(x-2)^2 + (-8x + 4 - 1)^2 = 13$

$x^2 - 4x + 4 + 64x^2 - 48x + 9 = 13$

$65x^2 - 52x = 0$

$x(65x-52)=0$
$x=0 \quad \vee \quad 65x=52$
$x=0 \quad \vee \quad x=\frac{4}{5}$
$y=4 \qquad y=-2\frac{2}{5}$

raaklijn in $(0,4)$ is: $(0-2)(x-2)+(4-1)(y-1)=13$
$-2(x-2)+3(y-1)=13$
$-2x+4+3y-3=13$
$-2x+3y=12$

raaklijn in $(\frac{4}{5},-2\frac{2}{5})$ is: $(\frac{4}{5}-2)(x-2)+(-2\frac{2}{5}-1)(y-1)=13$
$-1\frac{1}{5}(x-2)-3\frac{2}{5}(y-1)=13$
$-6(x-2)-17(y-1)=65$
$-6x+12-17y+17=65$
$-6x-17y=36$
$6x+17y=-36$

Opgave 19:

a. $x=-13+\lambda$
$y=a\lambda$

b. $9(-13+\lambda)^2+25(a\lambda)^2-36(-13+\lambda)-150a\lambda+36=0$
$9(169-26\lambda+\lambda^2+25a^2\lambda^2+468-36\lambda-150a\lambda+36=0$
$1521-234\lambda+9\lambda^2+25a^2\lambda^2+468-36\lambda-150a\lambda+36=0$
$(25a^2+9)\lambda^2+(-150a-270)\lambda+2025=0$
$D=(-150a-270)^2-4(25a^2+9)\cdot 2025=0$
$22500a^2+81000a+72900-202500a^2-72900=0$
$-180000a^2+81000a=0$
$a(-180000a+81000)=0$
$a=0 \quad \vee \quad -180000a=-81000$
$a=0 \quad \vee \quad a=\frac{9}{20}$

$\bar{r}_l=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ dus $\bar{n}_l=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dus $l_1: \quad y=0$

$\bar{r}_l=\begin{pmatrix}1\\ \frac{9}{20}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\9\end{pmatrix}$ dus $\bar{n}_l=\begin{pmatrix}9\\-20\end{pmatrix}$ dus $l_2: \quad 9x-20y=-117$

Opgave 20:

lijn l: $x=\lambda$ en $y=-8\frac{1}{2}+a\lambda$
$9\lambda^2-16(-8\frac{1}{2}+a\lambda)^2-36\lambda+96(-8\frac{1}{2}+a\lambda)-368=0$
$9\lambda^2-16(72\frac{1}{4}-17a\lambda+\lambda^2)-36\lambda-816+96a\lambda-368=0$
$9\lambda^2-1156+272a\lambda-16a^2\lambda^2-36\lambda-816+96a\lambda-368=0$
$(9-16a^2)\lambda^2+(368a-36)\lambda-2340=0$
$D=(368a-36)^2-4(9-16a^2)\cdot -2340=0$
$135424a^2-26496a+1296+84240-149760a^2=0$

$-14336a^2 - 26496a + 85536 = 0$

$$a = \frac{26496 \pm \sqrt{5607014400}}{-28672} = \frac{26496 \pm 74880}{-28672}$$

$a = -\frac{99}{28} \quad \vee \quad a = \frac{27}{16}$

$\bar{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{99}{28} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -99 \end{pmatrix}$ dus $\bar{n}_l = \begin{pmatrix} 99 \\ 28 \end{pmatrix}$ dus $l_1: \quad 99x + 28y = -238$

$\bar{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{27}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 27 \end{pmatrix}$ dus $\bar{n}_l = \begin{pmatrix} 27 \\ -16 \end{pmatrix}$ dus $l_2: \quad 27x - 16y = 136$

Opgave 21:

a. $x^2 + y^2 = (\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

b. de eenheidscirkel

Opgave 22:

a. $x_Q = \dfrac{-4 + 3\cos\varphi}{2} = -2 + 1\frac{1}{2}\cos\varphi$

$y_Q = \dfrac{2 + 3\sin\varphi + 6}{2} = 4 + 1\frac{1}{2}\sin\varphi$

R ligt op de cirkel: $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 2\frac{1}{4}$

b. $S(a,0)$

$x_S = \dfrac{-4 + 3\cos\varphi + a}{2} = \frac{1}{2}a - 2 + 1\frac{1}{2}\cos\varphi$

$\frac{1}{2}a - 2 = 5$

$\frac{1}{2}a = 7$

$a = 14$ dus $S(14,0)$

Opgave 23:

a. $x = 3\cos\varphi$

$y = 2\sin\varphi$

b. $\cos\varphi = \frac{1}{3}x$

$\sin\varphi = \frac{1}{2}y$

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$(\frac{1}{3}x)^2 + (\frac{1}{2}y)^2 = 1$

$\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$

$4x^2 + 9y^2 = 36$

Opgave 24:

a. $4\cos\varphi = x - 3$

$2\sin\varphi = y - 1$

$4\sin\varphi = 2y - 2$

$16\cos^2\varphi + 16\sin^2\varphi = 16$

$(4\cos\varphi)^2 + (4\sin\varphi)^2 = 16$

$(x-3)^2+(2y-2)^2=16$

b. $(x-3)^2+(2(y-1))^2=16$

$(x-3)^2+4(y-1)^2=16$

$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

middelpunt $M(3,1)$ en toppen $(-1,1)$, $(7,1)$, $(3,-1)$, $(3,3)$

$c^2=a^2-b^2=16-4=12$ dus brandpunten $F_1(3-2\sqrt{3},1)$ en $F_2(3+2\sqrt{3},1)$

Opgave 25:

a. het middelpunt is $(-4,2)$

$a=3 \quad b=2$

$\begin{cases} x=-4+3\cos\varphi \\ y=2+2\sin\varphi \end{cases}$

b. $x_Q=\frac{1}{2}(-4+3\cos\varphi-2)=-3+1\frac{1}{2}\cos\varphi$

$y_Q=\frac{1}{2}(2+2\sin\varphi)=1+\sin\varphi$

$1\frac{1}{2}\cos\varphi=x+3$

$\cos\varphi=\frac{2}{3}(x+3)$

$\sin\varphi=y-1$

$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$

$(\frac{2}{3}(x+3))^2+(y-1)^2=1$

$\frac{4}{9}(x+3)^2+(y-1)^2=1$

$4(x+3)^2+9(y-1)^2=9$

c. $a=3$ en $b=2$ dus je moet vermenigvuldigen met $1\frac{1}{2}$

$\begin{cases} x=-4+3\cos\varphi \\ y=3+3\sin\varphi \end{cases}$

$c_1:\quad (x+4)^2+(y-3)^2=9$

d. je moet vermenigvuldigen met $\frac{2}{3}$

$\begin{cases} x=-2\frac{2}{3}+2\cos\varphi \\ y=2+2\sin\varphi \end{cases}$

$c_2:\quad (x+2\frac{2}{3})^2+(y-2)^2=4$

Opgave 26:

$omtrek\ cirkel=2\pi r$

je hebt het $\frac{\varphi}{2\pi}$ e deel van de cirkel

$boog\ AB=\frac{\varphi}{2\pi}\cdot 2\pi r=r\cdot\varphi$

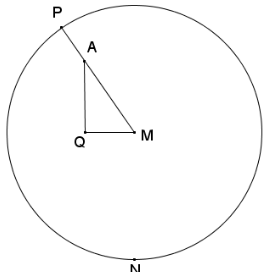
Opgave 27:

a. $AQ = AM \cdot \sin(\varphi - \tfrac{1}{2}\pi) = a \cdot \sin(\varphi - \tfrac{1}{2}\pi) = -a \cdot \cos\varphi$

$y_A = MN + AQ = r + AQ = r - a \cdot \cos\varphi$

$QM = AM \cdot \cos(\varphi - \tfrac{1}{2}\pi) = a \cdot \sin\varphi$

$x_A = ON - QM = r \cdot \varphi - a \cdot \sin\varphi$

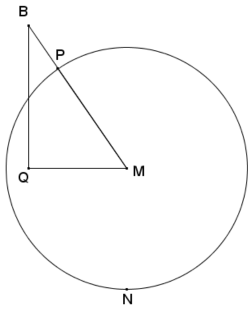


b. $BQ = BM \cdot \sin(\varphi - \tfrac{1}{2}\pi) = -b \cdot \cos\varphi$

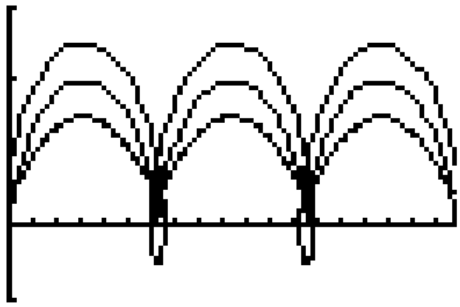
$y_B = MN + BQ = r - b \cdot \cos\varphi$

$QM = BM \cdot \cos(\varphi - \tfrac{1}{2}\pi) = b \cdot \sin\varphi$

$x_B = ON - QM = r\varphi - b \cdot \sin\varphi$



c.



Opgave 28:

a. R is de straal van de grote cirkel en r is de straal van de kleine cirkel

$\cos\varphi = \dfrac{OQ}{OM}$

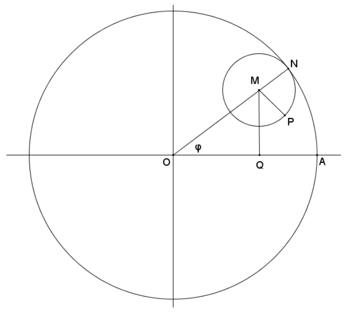
$OQ = OM \cdot \cos\varphi = (ON - OM) \cdot \cos\varphi = (R - r)\cos\varphi$

dus $x_M = (R - r)\cos\varphi$

$\sin\varphi = \dfrac{QM}{OM}$

$QM = OM \cdot \sin\varphi = (ON - MN)\sin\varphi = (R - r)\sin\varphi$

dus $y_M = (R - r)\sin\varphi$



b. $boog\ AN = R\varphi$ en $boog\ NP = r \cdot \angle NMP$

$boog\ AN = noog\ NP$

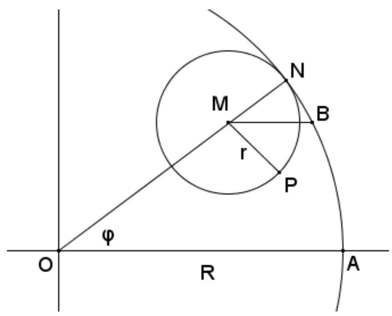
$R\varphi = r \cdot \angle NMP$

$\angle NMP = \dfrac{R}{r} \cdot \varphi$

c. MB is evenwijdig met OA dus $\angle BMN = \varphi$

$\angle BMP = \angle NMP - \angle BMN = \dfrac{R}{r} \cdot \varphi - \varphi$

punt P draait in negatieve richting rond M dus de draaihoek van MP is: $-\left(\dfrac{R}{r} \cdot \varphi - \varphi\right) = \varphi - \dfrac{R}{r} \cdot \varphi$

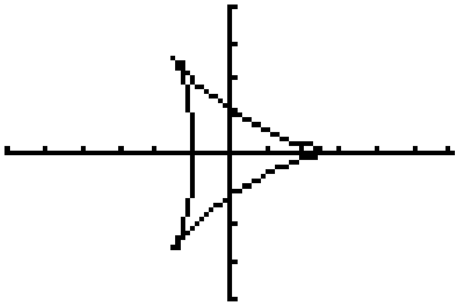


d. de draaihoek van OM is φ en dr draaihoek van MP is $\varphi - \frac{R}{r} \cdot \varphi$

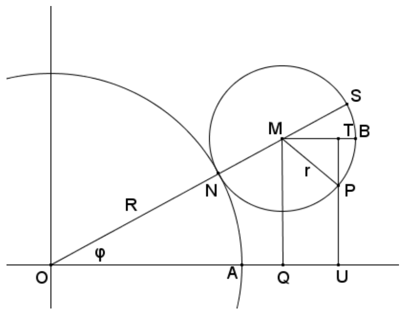
$$x_P = x_M + MP \cdot \cos\left(\varphi - \frac{R}{r} \cdot \varphi\right) = (R - r)\cos\varphi + r\cos\left(\varphi - \frac{R}{r} \cdot \varphi\right)$$

$$y_P = y_M + MP \cdot \sin\left(\varphi - \frac{R}{r} \cdot \varphi\right) = (R - r)\sin\varphi + r\sin\left(\varphi - \frac{R}{r} \cdot \varphi\right)$$

e.



Opgave 29:



$$\cos\angle MOQ = \frac{OQ}{OM}$$

$$OQ = OM \cdot \cos\angle MOQ = (ON + NM)\cos\varphi$$

$$x_M = (R + r)\cos\varphi$$

$$\sin\angle MOQ = \frac{MQ}{OQ}$$

$$MQ = OQ \cdot \sin\angle MOQ = (ON + NM)\sin\varphi$$

$$y_M = (R + r)\sin\varphi$$

$boog\ AN = R\varphi$ en $boog\ NP = r \cdot \angle NMP$

$$boog\ AN = boog\ NP$$

$$R\varphi = r \cdot \angle NMP$$

$$\angle NMP = \frac{R}{r} \cdot \varphi$$

MB is evenwijdig met de x-as dus $\angle BMS = \angle UOS = \varphi$

$$\angle BMP = \pi - \angle BMS - \angle NMP = \pi - \varphi - \frac{R}{r} \cdot \varphi$$

$$\cos\angle PMT = \frac{MT}{MP}$$

$$MT = MP \cdot \cos\angle PMT = MP \cdot \cos\angle BMP = r\cos\left(\pi - \varphi - \frac{R}{r} \cdot \varphi\right)$$

$$= r\cos\left(\pi - \left(\varphi + \frac{R}{r} \cdot \varphi\right)\right) = -r\cos\left(\varphi + \frac{R}{r} \cdot \varphi\right)$$

$$\sin\angle PMT = \frac{PT}{MP}$$

$$PT = MP \cdot \sin\angle PMT = MP \cdot \sin\angle BMP = r\sin\left(\pi - \varphi - \frac{R}{r} \cdot \varphi\right)$$

$$= r\sin\left(\pi - \left(\varphi + \frac{R}{r}\cdot\varphi\right)\right) = r\sin\left(\varphi + \frac{R}{r}\cdot\varphi\right)$$

$$x_P = OQ + QU = x_M + MT = (R+r)\cos\varphi - r\cos\left(\varphi + \frac{R}{r}\cdot\varphi\right)$$

$$y_P = UT - PT = y_M - PT = (R+r)\sin\varphi - r\sin\left(\varphi + \frac{R}{r}\cdot\varphi\right)$$

14.3 Het differentiaalquotiënt bij krommen

Opgave 30:

a. $\frac{dx}{dt} = x'(t) = 2t - 4$

$\frac{dy}{dt} = y'(t) = 2$

b. punt T is het punt op de parabool waarvan de x-coördinaat minimaal is, dus $x'(t) = 0$, dus $\frac{dx}{dt} = 0$

c. $2t - 4 = 0$

$2t = 4$

$t = 2$

$T(-4,-2)$

Opgave 31:

a. evenwijdig aan de x-as dus: $\frac{dy}{dt} = 0$

$\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3 = 0$

$3t^2 = 3$

$t^2 = 1$

$t = 1 \quad \vee \quad t = -1$

$(-3,-2)$ en $(-3,2)$

evenwijdig aan de y-as dus: $\frac{dx}{dt} = 0$

$\frac{dx}{dt} = 2t = 0$

$t = 0$

$(-4,0)$

b. $x = -1$ dus $t^2 - 4 = -1$

$t^2 = 3$

$t = \sqrt{3} \quad \vee \quad t = -\sqrt{3}$

$y = 0$ dus $t^3 - 3t = 0$

$t(t^2 - 3) = 0$

$t = 0 \quad \vee \quad t^2 = 3$

$t = 0 \quad \vee \quad t = \sqrt{3} \quad \vee \quad t = -\sqrt{3}$

dus K is voor $t = -\sqrt{3}$ en voor $t = \sqrt{3}$ in het punt $(-1,0)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{2t}$$

voor $t = -\sqrt{3}$ geldt: $\frac{dy}{dx} = \frac{6}{-2\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

$y = -\sqrt{3} \cdot x + b$ door $(-1,0)$

$0 = \sqrt{3} + b$

$b = -\sqrt{3}$

$y = -\sqrt{3} \cdot x - \sqrt{3}$

voor $t = \sqrt{3}$ geldt: $\frac{dy}{dx} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$y = \sqrt{3} \cdot x + b$ door $(-1,0)$

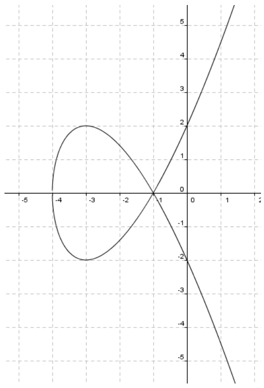
$0 = -\sqrt{3} + b$

$b = \sqrt{3}$

$y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$

de grafiek snijdt zichzelf niet loodrecht, want $\sqrt{3} \cdot -\sqrt{3} \neq -1$

c.



Opgave 32:

a. snijpunten x-as: $y = 4\sin t = 0$

$t = 0 \quad \vee \quad t = \pi \quad \vee \quad t = 2\pi$

$(1,0)$ en $(-3,0)$

snijpunten y-as: $x = 2\cos t - 1 = 0$

$2\cos t = 1$

$\cos t = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{3}\pi \quad \vee \quad t = \frac{5}{3}\pi$

$(0, 2\sqrt{3})$ en $(0, -2\sqrt{3})$

b. $-1 \leq \cos t \leq 1$

$-2 \leq 2\cos t \leq 2$

$-3 \leq 2\cos t - 1 \leq 1$ dus $-3 \leq x \leq 1$

$-1 \leq \sin t \leq 1$

$-4 \leq 4\sin t \leq 4$ dus $-4 \leq y \leq 4$

c. evenwijdig x-as: $\frac{dy}{dt} = 4\cos t = 0$

$t = \frac{1}{2}\pi \quad \vee \quad t = 1\frac{1}{2}\pi$

$(-1,4)$ en $(-1,-4)$

evenwijdig y-as: $\frac{dx}{dt} = -2\sin t = 0$

$t = 0 \quad \vee \quad t = \pi \quad \vee \quad t = 2\pi$

$(1,0)$ en $(-3,0)$

d. $\frac{dy}{dx} = \dfrac{4\cos t}{-2\sin t} = 2$

$4\cos t = -4\sin t$

$\cos t = -\sin t$

$\cos t = \cos(t + \frac{1}{2}\pi)$

$t = t + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad t = -t - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

k.n. $\quad 2t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

$t = \frac{3}{4}\pi \quad \vee \quad t = 1\frac{3}{4}\pi$

dus $(-\sqrt{2}-1, 2\sqrt{2})$ en $(\sqrt{2}-1, -2\sqrt{2})$

e. $2\cos t = x+1$

$4\cos t = 2x+2$

$16\cos^2 t + 16\sin^2 t = 16$

$(4\cos t)^2 + (4\sin t)^2 = 16$

$(2x+2)^2 + y^2 = 16$

$4(x+1)^2 + y^2 = 16$

Opgave 33:

a. $t > 0$

$\frac{dx}{dt} = 2t - 4 = 0$

$2t = 4$

$t = 2$

$x = -4$ dus $x \geq -4$

$\frac{dy}{dt} = 1 \cdot \ln t + t \cdot \frac{1}{t} = \ln t + 1 = 0$

$\ln t = -1$

$t = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$y = -\frac{1}{e}$ dus $y \geq -\frac{1}{e}$

b. evenwijdig x-as: $t = \frac{1}{e}$ dus $(\frac{1}{e^2} - \frac{4}{e}, -\frac{1}{e})$

evenwijdig y-as: $t = 2$ dus $(-4, 2\ln 2)$

c. $y = t\ln t = 0$

$t = 0 \quad \vee \quad \ln t = 0$

k.n. $\quad t = 1$

$(-3,0)$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + b$ door $(-3,0)$

$0 = 1\frac{1}{2} + b$

$b = -1\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$

Opgave 34:

a. evenwijdig x-as: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}t - 1$

$-\frac{1}{2}t = -1$

$t = 2$

$(0,-1)$

evenwijdig y-as: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}t = 0$

$t = 0$

$(-1,0)$

b. $y = x$ dus $\frac{1}{4}t^2 - 1 = \frac{1}{4}t^2 - t$

$t = 1$

$(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$

voor $t=1$ is $\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-1$

$y=-x+b$ door $(-\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$

$-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+b$

$b=-1\frac{1}{2}$

$y=-x-1\frac{1}{2}$

c. snijpunt x-as: $\frac{1}{4}t^2-t=0$

$t(\frac{1}{4}t-1)=0$

$t=0 \quad \vee \quad \frac{1}{4}t=1$

$t=0 \quad \vee \quad t=4$

$(-1,0)$ en $(3,0)$

dus $B(3,0)$

snijpunt y-as: $\frac{1}{4}t^2-1=0$

$\frac{1}{4}t^2=1$

$t^2=4$

$t=2 \quad \vee \quad t=-2$

$(0,3)$ en $(0,-1)$

dus $C(0,3)$

in $(3,0)$ geldt: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$ dus $y=\frac{1}{2}x+b$ door $(3,0)$

$0=1\frac{1}{2}+b$

$b=-1\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}$

in $(0,3)$ geldt: $\frac{dy}{dx}=2$ dus $y=2x+b$ door $(0,3)$

$y=2x+3$

$\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}=2x+3$

$-1\frac{1}{2}x=4\frac{1}{2}$

$x=-3$

$y=-3$

$D(-3,-3)$

d. $\frac{1}{4}t^2=x+1$

$y=x+1-t$ dus $t=x-y+1$

$x=\frac{1}{4}t^2-1$

$4x=t^2-4$

$4x=(x-y+1)^2-4$

Opgave 35:

a. de kettingregel

b. $(f(t))^2+4\cdot(g(t))^2=1$

$2f(t)\cdot f'(t)+8g(t)\cdot g'(t)=0$

$f(t)\cdot f'(t)+4g(t)\cdot g'(t)=0$

$x \cdot \frac{dx}{dt} + 4y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$

c. $4y \cdot \frac{dy}{dt} = -x \cdot \frac{dx}{dt}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$

Opgave 36:

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2y}{-2x + 2y} = 0$

$x^2 + 2y = 0$

$2y = -x^2$

$y = -\frac{1}{2}x^2$

$x^3 + 6x \cdot -\frac{1}{2}x^2 - 3(-\frac{1}{2}x^2)^2 = 0$

$x^3 - 3x^3 - \frac{3}{4}x^4 = 0$

$-2x^3 - \frac{3}{4}x^4 = 0$

$x^3(-2 - \frac{3}{4}x) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad -\frac{3}{4}x = 2$

k.n. $\quad x = -\frac{8}{3}$

$\quad y = -\frac{32}{9}$

$B(-2\frac{2}{3}, -3\frac{5}{9})$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2y}{-2x + 2y} = 1$

$x^2 + 2y = -2x + 2y$

$x^2 + 2x = 0$

$x(x+2) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = -2$

$y = 0 \qquad -8 - 12y - 3y^2 = 0$

vervalt $\qquad y = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{-6} = -2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$y = x + b$ door $(-2, -2 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$

$-2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} = -2 + b$

$b = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$y = x + \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$y = x + b$ door $(-2, -2 - \frac{2}{3}\sqrt{3})$

$-2 - \frac{2}{3}\sqrt{3} = -2 + b$

$b = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$y = x - \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Opgave 37:

a. $x^2 + xy + y^2 = 9$ snijden met $x = 3$

$9 + 3y + y^2 = 9$

$y(y+3) = 0$

$y = 0 \quad \vee \quad y = -3$

$(3,0)$ en $(3,-3)$

$2xdx + ydx + xdy + 2ydy = 0$

$(x+2y)dy=(-2x-y)dx$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y}{x+2y}$

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(3,0)}=-2$ $\qquad$ $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(3,-3)}=1$

$y=-2x+b$ door $(3,0)$ $\qquad$ $y=x+b$ door $(3,-3)$

$0=-6+b$ $\qquad$ $-3=3+b$

$b=6$ $\qquad$ $b=-6$

$y=-2x+6$ $\qquad$ $y=x-6$

b. horizontale raaklijn: $-2x-y=0 \quad \wedge \quad x+2y\neq 0$

$y=-2x$

$x^2-2x^2+4x^2=9$

$3x^2=9$

$x^2=3$

$x=\sqrt{3} \quad \vee \quad x=-\sqrt{3}$

$y=-2\sqrt{3} \qquad y=2\sqrt{3}$

dus $(\sqrt{3},-2\sqrt{3})$ en $(-\sqrt{3},2\sqrt{3})$

verticale raaklijn: $x+2y=0 \quad \wedge \quad -2x-y\neq 0$

$x=-2y$

$4y^2-2y^2+y^2=9$

$3y^2=9$

$y^2=3$

$y=\sqrt{3} \quad \vee \quad y=-\sqrt{3}$

$x=-2\sqrt{3} \qquad x=2\sqrt{3}$

dus $(-2\sqrt{3},\sqrt{3})$ en $(2\sqrt{3},-\sqrt{3})$

Opgave 38:

a. $K: \quad 9x^2-3y^2=y^3$

$18xdx-6ydy=3y^2dy$

$18xdx=(3y^2+6y)dy$

$\frac{dy}{dx}=\frac{18x}{3y^2+6y}=\frac{6x}{y^2+2y}$

horizontale raaklijn: $6x=0 \quad \wedge \quad y^2+2y\neq 0$

$x=0$

$-3y^2=y^3$

$y^3+3y^2=0$

$y^2(y+3)=0$

$y=-3 \quad \vee \quad y=0$ (vervalt)

dus $(0,-3)$

verticale raaklijn: $y^2+2y=0 \quad \wedge \quad 6x\neq 0$

$y(y+2)=0$

$y=0 \quad \vee \quad y=-2$

$9x^2 = 0 \qquad 9x^2 - 12 = -8$
$x = 0 \qquad 9x^2 = 4$
$(0,0) \qquad x^2 = \frac{4}{9}$
vervalt $\qquad x = \frac{2}{3} \quad \vee \quad x = -\frac{2}{3}$
$(\frac{2}{3}, -2)$ en $(-\frac{2}{3}, -2)$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{y^2 + 2y} = 1$

$6x = y^2 + 2y$
$3x = \frac{1}{2}y^2 + y$
$9x^2 = \frac{1}{4}y^4 + y^3 + y^2$
$\frac{1}{4}y^4 + y^3 + y^2 - 3y^2 = y^3$
$\frac{1}{4}y^4 - 2y^2 = 0$
$\frac{1}{4}y^2(y^2 - 8) = 0$
$y = 0 \quad \vee \quad y^2 = 8$
$x = 0 \qquad y = \sqrt{8} \quad \vee \quad y = -\sqrt{8}$
vervalt $\qquad 6x = 8 + 2\sqrt{8} \quad \vee \quad 6x = 8 - 2\sqrt{8}$
$x = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2} \qquad x = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$
dus $(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ en $(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

Opgave 39:

a. $x^4 - 4x^2 + 4 \cdot (px)^2 = 0$

$x^4 - 4x^2 + 4p^2x^2 = 0$
$x^2(x^2 - 4 + 4p^2) = 0$
$x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 4 + 4p^2 = 0$ heeft 2 oplossingen
$D = 0 - 4 \cdot 1 \cdot (-4 + 4p^2) > 0$
$16 - 16p^2 > 0$
$-16p^2 > -16$
$p^2 < 1$
$-1 < p < 1$

b. $x^4 - 4x^2 + 4 \cdot \frac{1}{4}x^2 = 0$

$x^4 - 3x^2 = 0$
$x^2(x^2 - 3) = 0$
$x = 0 \quad \vee \quad x^2 = 3$
$x = \sqrt{3} \quad \vee \quad x = -\sqrt{3}$
$A(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$
$4x^3dx - 8xdx + 8ydy = 0$
$8ydy = (8x - 4x^3)dx$
$\frac{dy}{dx} = \frac{8x - 4x^3}{8y} = \frac{2x - x^3}{2y}$

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(\sqrt{3},\frac{1}{2}\sqrt{3})} = -1$

$k: \quad y = -x + b$ door $(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$

$12\sqrt{3} = -\sqrt{3} + b$

$b = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$y = -x + 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c. horizontale raaklijn: $2x - x^3 = 0 \quad \wedge \quad 2y \neq 0$

$x(2 - x^2) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x^2 = 2$

$y = 0 \qquad x = \sqrt{2} \quad \vee \quad x = -\sqrt{2}$

vervalt $\qquad 4 - 8 + 4y^2 = 0 \quad \vee \quad 4 - 8 + 4y^2 = 0$

$4y^2 = 4$

$y^2 = 1$

$y = 1 \quad \vee \quad y = -1$

$(\sqrt{2},1) \quad (\sqrt{2},-1) \quad (-\sqrt{2},1) \quad (-\sqrt{2},-1)$

verticale raaklijn: $2y = 0 \quad \wedge \quad 2x - x^3 \neq 0$

$y = 0$

$x^4 - 4x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 4) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x^2 = 4$

vervalt $\qquad x = 2 \quad \vee \quad x = -2$

$(2,0) \quad (-2,0)$

d. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - x^3}{2y} = 1$

$2y = 2x - x^3$

$4y^2 = 4x^2 - 4x^4 + x^6$

$x^4 - 4x^2 + 4x^2 - 4x^4 + x^6 = 0$

$x^6 - 3x^4 = 0$

$x^4(x^2 - 3) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x^2 = 3$

vervalt $\qquad x = \sqrt{3} \quad \vee \quad x = -\sqrt{3}$

$2y = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -\sqrt{3} \quad \vee \quad 2y = -2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$y = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \vee \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$y = x + q$ door $(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}) \qquad y = x + q$ door $(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$

$-\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3} + q \qquad \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\sqrt{3} + q$

$q = -1\frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad q = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

dus $q < -1\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \vee \quad q > 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Opgave 40:

a. $y^2-2x-2y+3=0$

$(y-1)^2-1-2x+3=0$

$(y-1)^2=2x-2$

$(5-1)(y-1)=9-1+x-1$

$4(y-1)=7+x$

$4y-4=7+x$

$x-4y=11$

$2ydy-2dx-2dy=0$

$(2y-2)dy=2dx$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2y-2}$

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(9,5)}=\frac{1}{4}$

$y=\frac{1}{4}x+b$ door $(9,5)$

$y-5=\frac{1}{4}(x-9)$

$y=\frac{1}{4}x+2\frac{3}{4}$

b. $3x^2+5y^2-18x-20y-48=0$

$3(x^2-6x)+5(y^2-4y)=48$

$3((x-3)^2-9)+5((y-2)^2-4)=48$

$3(x-3)^2-27+5(y-2)^2-20=48$

$3(x-3)^2+5(y-2)^2=95$

$3(8-3)(x-3)+5(4-2)(y-2)=95$

$15(x-3)+10(y-2)=95$

$15x-45+10y-20=95$

$15x+10y=160$

$3x+2y=32$

$6xdx+10ydy-18dx-20dy=0$

$(10y-20)dy=(18-6x)dx$

$\frac{dy}{dx}=\frac{18-6x}{10y-20}$

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(8,4)}=-1\frac{1}{2}$

$y=-1\frac{1}{2}x+b$ door $(8,4)$

$y-4=-1\frac{1}{2}(x-8)$

$y=-1\frac{1}{2}x+16$

c. $3x^2-5y^2-12x+30y-205=0$

$3(x^2-4x)-5(y^2-6y)=205$

$3((x-2)^2-4)-5((y-3)^2-9)=205$

$3(x-2)^2-12-5(y-3)^2+45=205$

$3(x-2)^2-5(y-3)^2=172$

$3(10-2)(x-2)-5(5-3)(y-3)=172$

$24(x-2)-10(y-3)=172$

$24x-48-10y+30=172$

$24x-10y=190$

$12x-5y=95$

$6xdx-10ydy-12dx+30dy=0$

$(30-10y)dy=(12-6x)dx$

$\frac{dy}{dx}=\frac{12-6x}{30-10y}$

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(10,5)}=2\frac{2}{5}$

$y=2\frac{2}{5}x+b$ door $(10,5)$

$y-5=2\frac{2}{5}(x-10)$

$y=2\frac{2}{5}x-19$

14.4 Lijnen, vlakken en krommen in de ruimte.

<u>Opgave 41:</u>

Punt A: $20 \cdot 3 + 15 \cdot 0 + 12 \cdot 0 = 60$
Punt B: $20 \cdot 0 + 15 \cdot 4 + 12 \cdot 0 = 60$
Punt C: $20 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 12 \cdot 5 = 60$

<u>Opgave 42:</u>

a. Oxy-vlak dus $z = 0$

$$\begin{cases} 15x + 20y = 60 \\ y = 4 \end{cases}$$

$15x + 80 = 60$
$15x = -20$
$x = -\frac{4}{3}$
$Q(-\frac{4}{3}, 4, 0)$

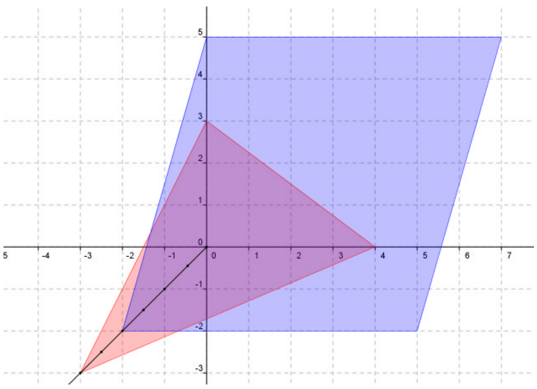
b. Oyz-vlak dus $x = 0$

$$\begin{cases} 20y + 12z = 60 \\ y + 4z = 4 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \times 1 \\ \times 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 20y + 12z = 60 \\ 6y + 12z = 24 \quad - \end{cases}$$

$14y = 36$
$y = \frac{18}{7}$
$\frac{18}{7} + 2z = 4$
$2z = \frac{10}{7}$
$z = \frac{5}{7}$
$R(0, \frac{18}{7}, \frac{5}{7})$

<u>Opgave 43:</u>



a. $V: \quad 2x + 3y + 4z = 12$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$$

Dus V gaat door $(6,0,0) \quad (0,4,0) \quad (0,0,3)$

$W: \quad 5x + 4z = 20$

$$\frac{x}{4} + \frac{z}{5} = 1$$

Dus W gaat door $(4,0,0) \quad (0,0,5)$
en is evenwijdig aan de y-as

b. Oxy-vlak dus $z = 0$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 5x = 20 \end{cases}$$

$x = 4$
$8 + 3y = 12$
$3y = 4$

$y = \frac{4}{3}$

$P(4, \frac{4}{3}, 0)$

Oxz-vlak dus $y = 0$

$$\begin{cases} 2x + 4z = 12 \\ 5x + 4z = 20 \quad - \end{cases}$$

$-3x = -8$

$x = \frac{8}{3}$

$\frac{16}{3} + 4z = 12$

$4z = \frac{20}{3}$

$z = \frac{5}{3}$

$Q(\frac{8}{3}, 0, \frac{5}{3})$

Oyz-vlak dus $x = 0$

$$\begin{cases} 3y + 4z = 12 \\ \quad 4z = 20 \end{cases}$$

$z = 5$

$3y + 20 = 12$

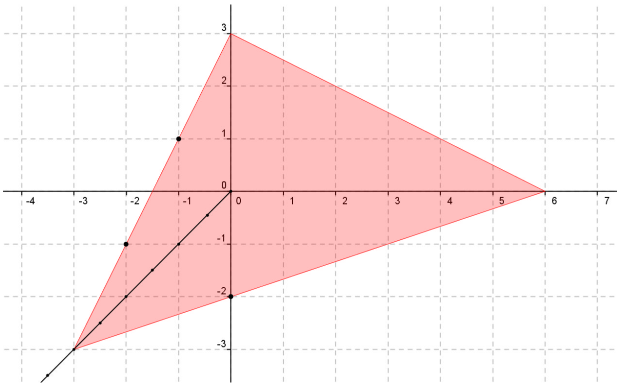
$3y = -8$

$y = -\frac{8}{3}$

$R(0, -\frac{8}{3}, 5)$

Opgave 44:

a.



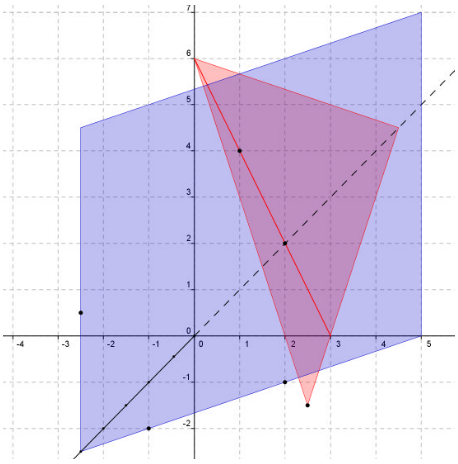
b. (6,0,0) (0,6,0) (0,0,3)

c. $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$

$x + y + 2z = 6$

Opgave 45:

a.



b. V gaat door $(-9,0,0)$ $(0,3,0)$ $(0,0,6)$

$\frac{x}{-9}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$

$-2x+6y+3z=18$

W gaat door $(5,0,0)$ $(0,5,0)$ en is evenwijdig aan de z-as

$\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$

$x+y=5$

c. Oxy-vlak dus $z=0$

$$\begin{cases} -2x+6y=18 \\ x+y=5 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times 1 \\ \times 2 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} -2x+6y=18 \\ \underline{2x+2y=10 \quad +} \end{cases}$$

$8y=28$

$y=3\tfrac{1}{2}$

$x=1\tfrac{1}{2}$

$P(1\tfrac{1}{2},3\tfrac{1}{2},0)$

Oxz-vlak dus $y=0$

$$\begin{cases} -2x+3z=18 \\ x=5 \end{cases}$$

$-10+3z=18$

$3z=28$

$z=9\tfrac{1}{3}$

$Q(5,0,9\tfrac{1}{3})$

Oyz-vlak dus $x=0$

$$\begin{cases} 6y+3z=18 \\ y=5 \end{cases}$$

$30+3z=18$

$3z=-12$

$z=-4$ dus $R(0,5,-4)$

Opgave 46:

Oxz-vlak dus $y=0$

$$\begin{cases} 3x+8z=24 \\ \quad 2x=12 \end{cases}$$

$$x=6$$
$$18+8z=24$$
$$8z=6$$
$$z=\tfrac{3}{4}$$

$P(6,0,\tfrac{3}{4})$

Oyz-vlak dus $x=0$

$$\begin{cases} 8z=24 \\ 3y=12 \end{cases}$$

$$z=3$$
$$y=4$$

$Q(0,4,3)$

Vlak U gaat door $(0,7,0)$ en $(0,0,7)$

$\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{7}+\dfrac{z}{7}=1$ door $(6,0,\tfrac{3}{4})$

$$\frac{6}{p}+\frac{\tfrac{3}{4}}{7}=1$$

$$\frac{6}{p}+\tfrac{3}{28}=1$$

$$\frac{6}{p}=\tfrac{25}{28}$$

$$p=\tfrac{168}{25}$$

$$\frac{x}{\tfrac{168}{25}}+\frac{y}{7}+\frac{z}{7}=1$$

$$\frac{25x}{168}+\frac{y}{7}+\frac{z}{7}=1$$

$$25x+24y+24z=168$$

Opgave 47:

a. $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}$

b. $\overline{OC}=\overline{OB}+\bar{r}_{AB}=\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\10\\13\end{pmatrix}$

c. $AB:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\p\\q\end{pmatrix}$$

$4+\lambda=3$

$\lambda=-1$

$$\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-5\end{pmatrix}$$

Dus $p=-2$ en $q=-5$

d. $$\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\14\\20\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}4+\lambda=7\\2+4\lambda=14\\1+6\lambda=20\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda=3\\\lambda=3\\\lambda=3\tfrac{1}{6}\end{cases}$$

Dus Marc heeft geen gelijk.

Opgave 48:

a. $$\bar{r}_l=\overline{AB}=\begin{pmatrix}8\\3\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$$

$$l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$$

b. $2(2+3\lambda)-3(1+\lambda)+5(-4+5\lambda)=9$

$4+6\lambda-3-3\lambda-20+25\lambda=9$

$28\lambda=28$

$\lambda=1$

$$P=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$$

Opgave 49:

a. door $(6,0,0)$ en $(0,4,0)$ en evenwijdig aan de z-as

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$$

$2x+3y=12$

$$CF: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b. $2 \cdot 6\lambda + 3 \cdot 6\lambda = 12$
$12\lambda + 18\lambda = 12$
$30\lambda = 12$
$\lambda = \frac{2}{5}$
$S = (2\frac{2}{5}, 2\frac{2}{5}, 3)$

Opgave 50:

$$FG: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

vlak *CDE*: $z = 5$
$6 - 6\lambda = 5$
$-6\lambda = -1$
$\lambda = \frac{1}{6}$
$P(1, \frac{5}{6}, 5)$
vlak *ABED* door $(8,0,0)$ $(0,6,0)$ $(0,0,10)$
$\frac{x}{8} + \frac{y}{6} + \frac{z}{10} = 1$
$15x + 20y + 12z = 120$
$15 \cdot 6\lambda + 20 \cdot 5\lambda + 12 \cdot (6 - 6\lambda) = 120$
$90\lambda + 100\lambda + 72 - 72\lambda = 120$
$118\lambda = 48$
$\lambda = \frac{24}{59}$
$Q(2\frac{26}{59}, 2\frac{2}{59}, 3\frac{33}{59})$

Opgave 51:

a. $\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$
b. $\sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{22} < 5$ dus het punt ligt binnen de bol
c. $\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + z^2} = 5$
$\sqrt{13 + z^2} = 5$
$13 + z^2 = 25$
$z^2 = 12$
$z = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \vee \quad z = -2\sqrt{3}$
dus $z_P = 2\sqrt{3}$

Opgave 52:

Oxz-vlak dus $y = 0$
$(x-2)^2 + (0-3)^2 + (z-1)^2 = 25$
$(x-2)^2 + (z-1)^2 = 16$

dus $r = 4$ en $M(2,0,1)$

Opgave 53:

a. $(0+3)^2 + (0-2)^2 + (0+4)^2 = 9+4+16 = 29$ dus klopt

b. Oxy-vlak dus $z = 0$

$(x+3)^2 + (y-2)^2 + 4^2 = 29$

$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$

dus $r = \sqrt{13}$ en $M(-3,2,0)$

c. $A(0,0,4)$ en $M(-3,2,-4)$

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$(-3\lambda+3)^2 + (2\lambda-2)^2 + (4-8\lambda+4)^2 = 29$

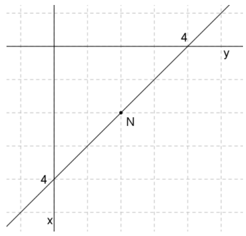
$9\lambda^2 - 18\lambda + 9 + 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 + 64\lambda^2 - 128\lambda + 64 = 29$

$77\lambda^2 - 154\lambda + 48 = 0$

$$\lambda = \frac{154 \pm \sqrt{8932}}{154}$$

$(-4{,}841; 3{,}227; -8{,}910)$ en $(-1{,}159; 0{,}773; 0{,}910)$

Opgave 54:



a. vlak V is evenwijdig met de z-as

punt N is het middelpunt van cirkel c_1 en punt P is een willekeurig punt van de bol

$N(2,2,0)$

$MN = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$r = PN = \sqrt{MP^2 - MN^2} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17}$

b. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10y - 45 = 0$

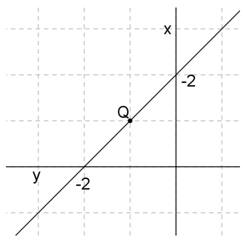
$(x-5)^2 - 25 + (y-5)^2 - 25 + z^2 = 45$

$(x-5)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 95$

$M = (5,5,0)$ dus $N(2,2,0)$

$MN = \sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$r = PN = \sqrt{MP^2 - MN^2} = \sqrt{95 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{77}$



c. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10y - 45 = 0 \end{cases}$

$25 - 10x - 10y - 45 = 0$

$-10x - 10y = 20$

$x + y = -2$

dus c_3 ligt in het vlak $x + y = -2$

$Q = (-1,-1,0)$

$MQ = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

$r = PQ = \sqrt{MP^2 - MQ^2} = \sqrt{25-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{23}$

d. $A(0,0,1)$ en $M(5,5,0)$

$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(5\lambda)^2 + (5\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 = 25$

$25\lambda^2 + 25\lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 25$

$51\lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0$

$\lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4900}}{102} = \dfrac{2 \pm 70}{102}$

$\lambda = \frac{12}{17} \quad \vee \quad \lambda = -\frac{2}{3}$

$(3\frac{9}{17}, 3\frac{9}{17}, \frac{5}{17})$ en $(-3\frac{1}{3}, -3\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3})$

Opgave 55:

a. punt A: $\lambda = 2$

punt B: als $\lambda = 3$ dan ligt het punt $(0,6,3)$ op l

als je dit punt rond de y-as draait, krijg je een cirkel met middelpunt $(0,6,0)$ en straal 3, dus het punt $(3,6,0)$ ligt op deze cirkel

punt C: als $\lambda = -5$ dan ligt het punt $(0,-10,-5)$ op l

als je dit punt spiegelt in de y-as krijg je het punt $(0,-10,5)$

punt D: als $\lambda = -7$ dan ligt het punt $(0,-14,-7)$ op l

als je dit punt rond de y-as draait, krijg je de cirkel met middelpunt $(0,-14,0)$ en straal 7, dus het punt $(-7,-14,0)$ ligt op deze cirkel

b. punt A: $4 \cdot 0^2 - 4^2 + 4 \cdot 2^2 = 0 - 16 + 16 = 0$

punt B: $4 \cdot 3^2 - 6^2 + 4 \cdot 0^2 = 36 - 36 + 0 = 0$

punt C: $4 \cdot 0^2 - (-10)^2 + 4 \cdot 5^2 = 0 - 100 + 100 = 0$

punt D: $4 \cdot (-7)^2 - (-14)^2 + 4 \cdot 0^2 = 196 - 196 + 0 = 0$

Opgave 56:

a. een willekeurig punt A van l is: $(0, \lambda, 2\lambda)$

de doorsnede van het vlak $y = \lambda$ met het kegelvlak is de cirkel met middelpunt $M(0,\lambda,0)$ en straal 2λ

dus voor ieder punt op deze cirkel geldt: $y = \lambda$ en $x^2 + z^2 = 4\lambda^2$

dus $x^2 + z^2 = 4y^2$

dus $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$

b. een willekeurig punt A van l is: $(0, \lambda, 2\lambda)$

de doorsnede van het vlak $z = 2\lambda$ met het kegelvlak is de cirkel met middelpunt $M(0,0,2\lambda)$ en straal λ

dus voor ieder punt op deze cirkel geldt: $z = 2\lambda$ en $x^2 + y^2 = \lambda^2$

dus $x^2 + y^2 = (\frac{1}{2}z)^2$

$x^2 + y^2 - \frac{1}{4}z^2 = 0$

dus $4x^2+4y^2-z^2=0$

Opgave 57:

a. een willekeurig punt A op de parabool is: $(0,\lambda,\tfrac{1}{2}\lambda^2)$

de doorsnede van het vlak $z=\tfrac{1}{2}\lambda^2$ met de paraboloïde is de cirkel met middelpunt $M(0,0,\tfrac{1}{2}\lambda^2)$ en straal λ

dus voor ieder punt op deze cirkel geldt: $z=\tfrac{1}{2}\lambda^2$ en $x^2+y^2=\lambda^2$

dus $x^2+y^2=2z$

b. een willekeurig punt A op de parabool is: $(0,2\lambda^2,\lambda)$

de doorsnede van het vlak $y=2\lambda^2$ met de paraboloïde is de cirkel met middelpunt $M(0,2\lambda^2,0)$ en straal λ

dus voor ieder punt op deze cirkel geldt: $y=2\lambda^2$ en $x^2+z^2=\lambda^2$

dus $x^2+z^2=\tfrac{1}{2}y$

dus $y=2x^2+2z^2$

Opgave 58:

a. $y=\lambda$ dus $\lambda^2+4z^2=16$

$4z^2=16-\lambda^2$

$z^2=4-\tfrac{1}{4}\lambda^2$

$z=\sqrt{4-\tfrac{1}{4}\lambda^2}$

dus $r=\sqrt{4-\tfrac{1}{4}\lambda^2}$

dus voor de cirkel geldt: $x^2+z^2=r^2$

$x^2+z^2=4-\tfrac{1}{4}\lambda^2$

b. $x^2+z^2=4-\tfrac{1}{4}\lambda^2$ en $y=\lambda$

$x^2+z^2=4-\tfrac{1}{4}y^2$

$x^2+\tfrac{1}{4}y^2+z^2=4$

$4x^2+y^2+4z^2=16$

c. $z=\lambda$ dus $y^2+4\lambda^2=16$

$y^2=16-4\lambda^2$

$y=\sqrt{16-4\lambda^2}$

de doorsnede van de ellipsoïde met het vlak $z=\lambda$ is een cirkel met middelpunt $M(0,0,\lambda)$ en straal $\sqrt{16-4\lambda^2}$

dus voor de cirkel geldt: $x^2+y^2=16-4\lambda^2$ en $z=\lambda$

dus $x^2+y^2=16-4z^2$

dus $x^2+y^2+4z^2=16$

Opgave 59:

a. $z=\lambda$ dus $y^2-4\lambda^2=4$

$y^2=4+4\lambda^2$

dus de doorsnede van de hyperboloïde met het vlak $z = \lambda$ is een cirkel met middelpunt $(0,0,\lambda)$ en straal $\sqrt{4+4\lambda^2}$

dus voor de cirkel geldt: $x^2 + y^2 = 4+4\lambda^2$ en $z = \lambda$

dus $x^2 + y^2 = 4+4z^2$

dus $x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$

b. $y = \lambda$ dus $\lambda^2 - 4z^2 = 4$

$-4z^2 = 4 - \lambda^2$

$z^2 = \frac{1}{4}\lambda^2 - 1$

dus de doorsnede van de hyperboloïde met het vlak $y = \lambda$ is een cirkel met middelpunt $(0,\lambda,0)$ en straal $\sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 - 1}$

dus voor de cirkel geldt: $x^2 + z^2 = \frac{1}{4}\lambda^2 - 1$ en $y = \lambda$

dus $x^2 + z^2 = \frac{1}{4}y^2 - 1$

dus $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = -1$

dus $4x^2 + y^2 + 4z^2 = -4$